

제6장 . 행렬(Matrix)

§1. 행렬의 뜻과 연산

1. 행렬의 뜻과 종류

1) 행렬의 뜻

수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호()로 묶은 것을 행렬이라 하고, 괄호 안의 각각의 수나 문자를 그 행렬의 성분이라고 한다.

행렬에서 가로의 배열을 행(Row)이라 하고,

세로의 배열을 열(Column)이라 한다.

행의 개수가 m , 열의 개수가 n 인

행렬을 m 행 n 열의 행렬 또는

$m \times n$ 행렬이라 한다. 행렬은 대문자

$A, B, C, \dots$ 를 써서 나타내고, 행렬의

성분은 소문자 $a, b, c, \dots$ 를 써서 나타낸다.

행렬 A 에서 제 i 행과 제 j 열이 만나는 위치에 있는 성분을 행렬 A 의 (i, j) 성분이라고 하며, 이 행렬 A 의 (i, j) 성분을 a_{ij} 로 나타낸다.

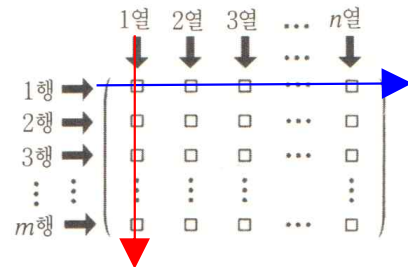
행렬 A 가 2×3 행렬이면

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \text{제 } j \text{ 열} \\ \text{제 } i \text{ 행} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

으로 나타낼 수 있다.

기호 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots$ 등은 어떤 수를 나타내는 문자라고 생각하면 된다.



【예제 1】

다음 행렬은 어떤 꼴($m \times n$ 행렬)의 행렬인가?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

풀이

(1) 1행 3열의 행렬(1×3 행렬)

(2) 3행 2열의 행렬(3×2 행렬)

... 【예제 2】 ...

다음 행렬 A, B 에서 $a_{13}, a_{21}, b_{22}, b_{31}$ 의 값을 말하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

풀이 $a_{13} = 4, a_{21} = -5, b_{22} = 6, b_{31} = 5$

2) 행렬의 종류

• 정사각 행렬 : 행의 숫자와 열의 숫자가 같은 행렬

예 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$: 2×2 정사각형 행렬

• 영 행렬 : 모든 성분이 0인 행렬

예 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• 단위 행렬 : 정사각 행렬 중에서 주 대각선의 성분은 모두 1이고, 나머지는 모두 0인 행렬

예 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• 대각 행렬 : 정사각 행렬로서 주 대각선의 성분 이외의 성분이 모두 0인 행렬

예 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

• 삼각 행렬 : 정사각 행렬로서 주 대각선의 위 또는 아래의 성분이 모두 0인 행렬

예 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$: 하 삼각행렬, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: 상 삼각행렬

• 대칭 행렬 : 정사각 행렬로서 (i, j) 성분 = (j, i) 성분인 행렬

예 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

• 반대칭 행렬 : 정사각 행렬로서 (i, j) 성분 = $-(j, i)$ 인 행렬(주대각선의 성분은 모두 0이다)

예 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

• 전치 행렬 : 행렬의 행과 열을 바꾼 행렬

예 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

2. 행렬의 연산

1) 행렬의 덧셈

두 행렬 A, B 가 같은 꼴일 때, 대응하는 성분의 합을 각 성분으로 하는 행렬을 A 와 B 의 합이라 하고, $A+B$ 로 나타낸다.

예 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ 일 때

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

• 행렬의 덧셈에 대한 연산법칙

- ① 교환법칙 : $A+B=B+A$
- ② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$

【예제 3】

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 일 때, 두 행렬 A, B 의 합을 구하라.

풀이 $A+B = \begin{pmatrix} -1+1 & 3+0 & 5-3 \\ -2+2 & 4+4 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

2) 행렬의 뺄셈

두 행렬 A, B 가 같은 꼴일 때, $B+X=A$ 를 성립시키는 행렬 X 를 A 에서 B 를 뺀 차라하고, $A-B$ 로 나타낸다.

이때, $A-B$ 는 A 의 성분에서 이에 대응하는 B 의 성분을 뺀 차를 성분으로 하는 행렬이 된다.

예 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ 일 때

$$A-B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{pmatrix}$$

주의 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 일 때 A 와 B 는 서로 다른 꼴이므로 합과 차를 구할 수 없다.

【예제 4】

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$ 일 때 $(A-B)-C$ 를 계산하라.

풀이 $A-B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -0 & -3 & -(-4) \\ 2 & -7 & 2 & -(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore (A-B)-C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -14 & 12 \end{pmatrix}$

3) 행렬의 실수배

임의의 실수 k 에 대하여 행렬 A 의 각 성분을 k 배한 것을 성분으로 하는 행렬을 A 를 k 배한 행렬이라 하고 kA 로 나타낸다.

예 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 일 때, $kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$

【예제 5】

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, $2A-3B$ 를 계산하라.

풀이 $2A-3B = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

【예제 6】

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 일 때 $4A+5X=B$ 를 성립시키는 행렬 X 를 구하라.

풀이 행렬은 수를 나타내는 문자처럼 이항하여 풀 수 있으므로 주어진 식을 행렬 X 에 대하여 정리한다.

$4A+5X=B$ 에서 $5X=B-4A$ 이므로

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{5}(B-4A) = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 16 \\ -4 & 4 & 20 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) 행렬의 곱셈

행렬 A 의 열의 개수와 행렬 B 의 행의 개수가 같을 때, A 의 i 행과 B 의 j 열의 대응하는 위치에 있는 성분을 차례로 곱하여 더한 것을 (i, j) 성분으로 하는 행렬을 A 와 B 의 곱이라 하고, AB 로 나타낸다.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 1} & \boxed{1 \times 2} \\ \boxed{2 \times 1} & \boxed{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

주의 가로의 길이($\leftrightarrow$)와 세로의 길이($\updownarrow$)가 다를 때에는 곱이 정의되지 않는다.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

오른편과 같은 두 행렬의 곱은 c 에 대응하는 성분이 없으므로
곱이 정의되지 않는다.

예 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 일 때,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

여기서, $A = (l \times m \text{ 행렬})$, $B = (m \times n \text{ 행렬})$ 이면 AB 는 $l \times n$ 행렬이 된다.
곧, $l \times m$, $m \times n$ 에서 가운데 m 이 없어지고 $l \times n$ 행렬이 된다.

$$(l \times m \text{ 행렬})(m \times n \text{ 행렬}) \implies (l \times n \text{ 행렬})$$

예 $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 5 \times 3 + (-4) \times 2 \\ -1 \times 3 + (2 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 8 \\ -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2 \times 2 \text{ 행렬}) \times (2 \times 1 \text{ 행렬}) \Rightarrow (2 \times 1 \text{ 행렬})$$

【예제 7】

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{일 때, } AB \text{를 구하라.}$$

풀이 앞의 행렬에서는 행, 뒤의 행렬에서는 열을 택하여 곱한다.

$(2 \times 3 \text{ 행렬}) \times (3 \times 2 \text{ 행렬})$ 이므로 $(2 \times 2 \text{ 행렬})$ 이 된다.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

• 행렬의 곱셈에 대한 연산법칙

- ① 결합법칙 : $(AB)C = A(BC)$
- ② 분배법칙 : $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$
- ③ 실수배의 곱 : $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ (단, k 는 실수)

주의 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다. ($AB \neq BA$)

예 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 일 때, $AB \neq BA$ 임을 보여라.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

... 【예제 8】

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때, 다음을 계산하라.

(1) $A^2 - B^2$

(2) $(A+B)(A-B)$

풀이 $A^2 = AA$ ($B^2 = BB$), $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

$$(1) A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2) (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) & 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

§2. 행렬식과 역행렬

1. 행렬식(Determinant)

1) 행렬식의 뜻

정사각 행렬 A 에 대하여 부호를 붙인 기본곱(행이나 열에서 중복되지 않게 성분을 하나씩 택해 곱한 것)의 합으로 표시한 것을 행렬식(Determinant)이라 하고 $\det(A)$, $|A|$ 로 나타낸다.

• Sarrus의 방법

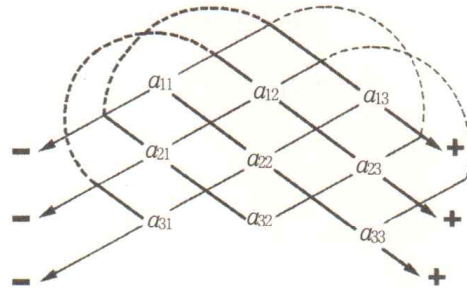
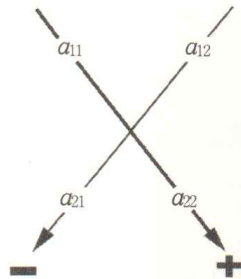
2차, 3차의 행렬식의 값을 구하는 데 사용되는 것으로, 4차 이상의 행렬식에 대해서는 적용되지 않는다.

$$\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{일 때, } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{일 때,}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

참고 $|A|$ 는 각 성분을 대각선으로 곱한 데에 부호를 붙여 더한 것이 된다.



• Laplace 전개

a_{ij} 가 들어있는 행과 열을 제외한 성분들의 행렬식을 a_{ij} 의 소행렬식이라 하고, $|M_{ij}|$ 로 나타낸다.

그리고 $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ 로 놓을 때 A_{ij} 를 a_{ij} 의 여인수라 한다.

행렬식의 값은 한 행(열)의 각 성분과 여인수와의 곱을 합한 것이 된다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|M_{13}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

【예제 9】

다음 행렬의 행렬식의 값을 구하라.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

풀이 (1) Sarrus의 방법

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 8$$

(2) ① Sarrus의 방법

$$\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) \\
&= -10 - 10 - 4 + 12 = -12
\end{aligned}$$

② Laplace 전개

$$\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\
&= [-3 \times \{0 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2)\}] - [1 \times \{1 \cdot 4 - (-2) \cdot 5\}] + [5 \times \{1 \cdot (-2) - 0 \cdot 5\}] \\
&= (-3) \cdot (-4) - 1 \cdot 14 + 5 \cdot (-2) = -12
\end{aligned}$$

2) 행렬식의 성질

- ① 행렬식에서 행과 열을 바꾸어 놓아도 그 값은 변하지 않는다.
- ② 행렬식의 2개의 행(또는 열)을 바꿔 놓으면 부호가 변한다.
- ③ 행렬식의 1행(또는 열)의 모든 성분을 k 배하면 행렬식의 값은 k 배가 된다.
- ④ 행렬식의 1행(또는 열)을 k 배해서 다른 행에 더해도 그 값은 변하지 않는다.
- ⑤ 행렬식의 1행(또는 열)의 모든 성분이 0이면 행렬식의 값은 0이다.
- ⑥ 행렬식의 2행(또는 열)의 성분이 같으면 행렬식의 값은 0이다.
- ⑦ 어떤 행(또는 열)에 다른 행(또는 열)의 여인수를 곱해서 합하면 0이 된다.

【예제 10】

행렬식의 성질을 이용하여 다음 행렬식의 값을 구하라.

$$(1) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

풀이 (1) 행렬식의 성질 ④를 이용하여 2번째 열과 3번째 열을 1번째 열에 합하고 행렬식의 성질 ⑤에 의하여

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+1+1 & 1 & 1 \\ 1-2+1 & -2 & 1 \\ 1+1-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 행렬식의 성질 ③에 의하여 3열의 공통배수 2로 뽑아내면 1열과 3열이 같으므로 행렬식의 성질 ⑥에 의하여

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

【예제 11】

다음 행렬식의 값을 구하라.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

풀이 4차 행렬식이므로 행렬식의 성질을 이용하여 한 열에 관해 Laplace 전개를 하고 Sarrus의 방법에 의해 행렬식 값을 계산한다.

제3행을 -2배, 2배, 1배하여 각각 제 1행, 제2행, 제4행에 더하고, 제1열에 대해 Laplace 전개한 후, Sarrus의 방법을 적용하면,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1\text{행} - (2 \times 3\text{행}) \\ \leftarrow 2\text{행} + (2 \times 3\text{행}) \\ \leftarrow 4\text{행} + (1 \times 3\text{행}) \end{array}$$

$$= (-1)^{3+1} 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \leftarrow 1\text{열에 관해 Laplace 전개}$$

$$= 10 + 3 - 36 + 36 - 15 - 2 \leftarrow \text{Sarrus의 방법}$$

$$= -4$$

2. 역행렬(Inverse matrix)

정사각 행렬 A 와 단위 행렬 E 에 대하여 $AX=XA=E$ 를 성립시키는 행렬 X 가 존재할 때, X 를 A 의 역행렬이라 하고, A^{-1} 로 나타낸다.

$$X=A^{-1} \Leftrightarrow A=X^{-1}, AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

참고 A^{-1} 를 'Inverse A'라고 읽는다.

1) 정의에 의한 역행렬의 계산

X 가 A 의 역행렬일 때,

$$AX=XA=E$$

임을 이용한다.

즉, $AX=E$ (또는 $XA=E$)에서 양변의 대응하는 성분을 같게 놓아 이루어지는 연립방정식을 풀어 X 의 성분을 결정한다.

... 【예제 12】 ...

역행렬의 정의를 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

풀이 구하는 행렬을 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 로 놓고 $AX=E$ 를 성립시키는 행렬 X 를 구한다.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 5a+2c & 5b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬의 상등의 정의로부터

$$3a+c=1, 3b+d=0, 5a+2c=0, 5b+2d=1$$

이 네 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1, c=-5, d=3$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ 곧, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2) 공식에 의한 역행렬의 계산

• 2차 정사각 행렬

행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $D=ad-bc$ 라고 하면

① $D \neq 0$ 일 때, A 의 역행렬은 존재하고 $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

② $D=0$ 일 때, A 의 역행렬은 존재하지 않는다.

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

참고 A^{-1} 의 ()안의 성분은 A 의 성분 a 와 d 를 교환하고, b 와 c 는 부호를 바꾼 것이 된다.

• 3차 정사각 행렬

a_{ij} 의 여인수를 $A_{ij} [= (-1)^{i+j} |M_{ij}|]$ 라 할 때, 행렬 (A_{ij}) 의 전치 행렬을 A 의 수반 행렬(Adjoint Matrix)이라 하고 $\text{adj}(A)$ 로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

이때 역행렬은 다음과 같이 구한다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

【예제 13】

공식을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하라.

(1) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $B^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 1 \cdot 5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 4 = 9$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -12 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

§3. 행렬의 응용

1. 1차 연립방정식

행렬을 이용하여 x, y 에 대한 1차 연립방정식을 나타내면,

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈의 정의로부터

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

같은 방법으로 x, y, z 에 대한 1차 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면,

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

1) 역행렬을 이용한 해

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\text{에서, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

라고 하면, $AX = B$ 로 나타내어진다.

여기서, 양 변의 왼편에 A^{-1} 를 곱하면 $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$$\therefore \underline{X = A^{-1}B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

같은 방법으로 x, y, z 에 대한 1차 연립방정식의 해를 구하면,

$$\underline{X = A^{-1}B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

... 【예제 14】 ...

역행렬을 이용하여 다음 1차 연립방정식을 풀어라.

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

풀이

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 이라 하면,

$$\cdot \det(A) = |A| = 1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 5 = -1$$

$$\cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x=1, y=-3, z=2$$

2. 크레이머(Cramer)의 공식

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

이때, 주어진 연립방정식의 해는 다음과 같이 된다.

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}$$

여기서, $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$

D_1 은 D 의 첫 번째 열 자리에 p, q 를, D_2 는 D 의 두 번째 열 자리에 p, q 를 대입시켜 얻은 것이다.

같은 방법으로, x, y, z 에 대한 1차 연립방정식의 해를 구하면,

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\underline{x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}}$$

$$\underline{\text{여기서, } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}$$

【예제 15】

크레이머의 공식을 이용하여 다음 방정식의 해를 구하라.

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \\ 3x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

풀이 (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cdot D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 11$$

$$\cdot D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 22$$

$$\cdot D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -11$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{22}{11} = 2, y = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{11} = -1$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cdot D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 5 = -1$$

$$\cdot D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 5 = -1$$

$$\cdot D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 6 = 3$$

$$\cdot D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = -2$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{-1} = 1, y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{-1} = -3, z = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$